Билет 1)

*Определитель порядка n. Свойства определителя. Вычисление методом Гаусса.*

**Опр**:Некоторое число, заданное формулой:

Называется определителем матрицы:

Где:

**Свойства определителя**:

1. Пусть . Тогда|A| = 0

Следствие 1: Определитель, содержащий две пропорциональные строки = 0

Следствие 2:Определитель, строка которого есть лин. комбинации других строк = 0

1. Пусть . Тогда**:**
2. Определитель **треугольной матрицы** равен произведению элементов **главной** диагонали.
3. Определитель не меняется при добавлении к его строке произвольной лин. комбинации других строк.

**Метода Гаусса** *–* метод вычисления определителей, основанный на вышеописанных свойствах определителя. Основная идея заключается в том, чтобы привести квадратную матрицу к треугольному виду, используя следующие преобразования:

1. Перестановка строк
2. Умножение строки на ненулевое число
3. Прибавление к данной строке линейной комбинации других строк.

**Доказательства свойств 3, 5**:

3)

Пусть существует определитель матрицы . Запишем её определитель:

Заметим, что каждый элемент такой суммы будет включать в себя по компоненту из каждой строки => В каждом слагаемом будет множитель = 0 => Сама сумма = 0.

5)

Пусть . Тогда**:**

Рассмотрим такой определитель, равный 0:

Билет 2)

*Правило Крамера*

**Теорема**: Критерий определённости системы (матрицы).

В стандартных обозначениях матрица имеет вид:

Система является определённой тогда и только тогда, когда её определитель не равен 0

**Доказательство**:

Обозначим через матрицу ступенчатого вида, полученную путём прямого хода метода Гаусса. Тогда, по свойствам определителя

.

Пусть r – число ступеней матрицы . Система является определённой тогда и только тогда, когда r = n

(число ступеней равно числу столбцов, которое равно числу строк в определителе).

Т. е. должно выполняться свойство определителя . Теорема доказана.

**Следствия**:

1. Однородная система () имеет ненулевое решение .
2. ⬄ строки и столбцы в образуют линейно зависимую систему. Т. е. 1 из строк или 1 из столбцов есть линейная комбинация остальных.

**Правило Крамера**:

Пусть , тогда единственное решение системы имеет вид:

Где – определитель, который получается заменой – го столбца на столбец (столбец свободных членов).

**Доказательство**:

Пусть – единственное решение системы (в силу теоремы 1). Зафиксируем Тогда имеем: (т. к. определитель аддитивная функция столбцов)

Выделены -е столбцы, остальные, как в d. Заметим, что система зависит от .

При определитель имеет пропорциональные столбцы, следовательно

Откуда следует Теорема доказана.

Наконец, отметим, что решение системы с помощью определителей (в случае ) имеет на порядок большую трудоёмкость, чем метод Гаусса. Если все определители , считаются приведением к треугольному виду, то трудоёмкость метода Крамера составляет операций (по сравнению с для метода Гаусса).

Вопрос 3)

*Разложение определителя по строке (столбцу)*

**Теорема о разложении определителя по строке (столбцу)**.

Пусть , тогда – алгебраическое дополнение к элементу . При любом имеет место равенство (разложение определителя по -й строке)

То же самое выполняется и для столбцов.

**Доказательство**:

Представим -ю строку в виде

Определитель – аддитивная функция строк поэтому

В каждом из определителей выделена -я строка. Остальные строки – такие, как в A. Убедимся, что . Преобразуем , с помощью перестановок к виду:

– матрица, полученная из A путём вычёркивания -й строки и j-го столбца. Применяя лемму об определителе с нулевым углом, приходим к равенству:

Теорема доказана.

**Следствие**:

Если , то .

Обобщение следствия и теоремы:

– разложение по -ой строке

– разложение по j-му столбцу

– символ Кронекера.

**Теорема Лапласа.** Пусть в определителе порядка n выделены строк (столбцов), Определитель равен сумме произведений всех миноров -го порядка, содержащихся в этих строках (столбцах), на их алгебраические дополнения.

Изображение выглядит как текст, Шрифт, диаграмма, линия

Контент, сгенерированный ИИ, может содержать ошибки.

Билет 4)

*Обратная матрица. Теорема об обратной матрице. Способы вычисления А-1*

**Опр:** Матрица A-1, для которой выполнены равенства

AA-1 = A-1A = E

называется обратной к матрице . Матрица , для которой существует обратная, называется обратимой.

**Теорема:** Матрица A является обратимой тогда и только тогда, когда эта матрица является невырожденной. (неособенной, несингуляpной) т. е. |A| 0. Если |A| 0, то

(\*)

где := (Aij) – матрица алгебраических дополнений к элементам матрицы A.

**Доказательство:**

Пусть А обратима. Из определения A-1 и теоремы об определителе произведения матриц следует, что

Это гарантирует не вырожденность матрицы А и равенство:

Пусть А невырожденная. B – матрица из правой части уравнения (\*), убедимся, что AB = BA = E.

Проверка на примере AB = E:

Пусть C = AB. Тогда по результатам пункта о разложении определителя ()

Значит, C = () = E.

Таким образом, установлены и обратимость A, и формула (\*). Теорема доказана.

**Способы вычисления А-1**:

1. Метод Гаусса вычисления A-1. Компактная запись имеет вид:
2. Метод нахождения через присоединённую матрицу

где – матрица алгебраических дополнений.

Билет 5)

*Многочлены и действия с ними. Теорема о делении с остатком.*

**Определение 1:** *Многочленом над F* (где F – поле R или поле C) *называется выражение вида*

(1)

Числа ai называются коэффициентами Максимальное , для которого , называется степенью и обозначается . Многочлены равные, если равны все коэффициенты.

Совокупность всех таких многочленов обозначается через

**Определение 2:** Многочленом называется бесконечный набор

(2)

Чисел ai, принадлежащих , в котором все ai, начиная с некоторого, равны 0. Два набора, у которых все соответствующие компоненты совпадают, называются равными.

В частности, тогда и только тогда, когда все .

Соответствие между записями 1 и 2 очевидно:

**Действия с многочленами:** *f* = () *и g* = ()

Сложение:

Умножение: *,* где*=*

**Теорема 1**. Совокупность относительно операций 1–2 образует ассоциативное коммутативное кольцо с единицей, не имеющее делителей нуля, то есть целостное кольцо.

**Доказательство**: Коммутативность сложения и умножения в F[x] следует из симметричного вида и относительно и . Нулевой элемент это нуль многочлен . Очевидно, для противоположным является . Единицей в будет многочлен

, обозначаемый просто 1. Ясно, что

Ассоциативность сложения, ассоциативность умножения и дистрибутивность вытекают из следующих числовых равенств:

Обозначим . Соотношение (1) означает, что совпадают компоненты многочленов пpи произвольном ; поэтому

Аналогично, (2) и (3) эквивалентны соответственно

Покажем, наконец, что не имеет делителей нуля, то есть таких многочленов и , одновременно не равных 0, что . Пусть ; и первые ненулевые компоненты и . Тогда

В правом наборе есть компонента с номером . Это означает, что если , то обязательно или . Теоpема доказана.

**Теорема 2.** Для любых

Доказательство сразу получается из определения операций 1–2.

**Теорема (о делении с остатком):** пусть Существует единственный и единственный такие, что

(1)

**Доказательство:**

**Существование**.

Степени многочленов обозначим через и соответственно. Докажем сначала, что требуемые многочлены и существуют. Удобно многочлен зафиксировать, а многочлену разрешить изменяться произвольным образом.

1. Если, то

откуда видно, что

1. Пусть . Считая, что многочлены и записаны по убыванию степеней, обозначим через *,*  их старшие коэффициенты.

Применим для доказательства существования многочленов и метод математической индукции. При положим

(2)

Поскольку степени многочленов и  равны между собой, а их старшие коэффициенты совпадают, получаем, что . Если из равенства (2) выразить многочлен *f(x)*, то станет понятно, что частное равно *,* а остаток равен *r(x)*.

1. Пусть . Предположим, что для любого многочлена степени, меньшей *n*, частное и остаток от деления на существуют. Рассмотрим многочлен

(3)

Нетрудно понять, что ; поэтому к многочлену применимо предположение индукции. Следовательно, найдутся такие многочлены и *,* что

(4)

Из равенств (3) и (4) легко получить, что

Таким образом, существование частного и остатка от деления на доказано.

**Единственность**.

Предположим, что для пары выполнено . Тогда , то есть . По теоpеме 2 мы приходим к равенству

Это соотношение выполняется лишь в ситуации тогда оно имеет вид . Если же или , то соотношение неверно, так как . Это устанавливает единственность *q* и *r*. Теорема полностью доказана.

Билет 6)

*НОД двух многочленов. Алгоритм Евклида.*

**Определение 1.** Пусть многочлен, для которого выполнены одновременно следующие два условия:

Такой многочлен называется наибольшим общим делителем (НОД) и . Обозначение

**Теорема 1.** Пусть НОД многочленов и существует. Тогда нормированный НОД этих многочленов является единственным.

**Доказательство**.Если , два нормированных НОД и . Тогда по определению и . По свойству предыдущего пункта , . Так как старшие коэффициенты и равно 1, то , то есть , что и требовалось доказать.

**Свойства НОД:**

**Теорема 2.** Для любых двух ненулевых многочленов их НОД существует.

**Доказательство** (Через алгоритм Евклида).

Пусть . Построим конечные последовательности многочленов ri и qi по следующему правилу:

r1:= f, r0 := g; если ri = 0, то qi и ri+1 есть соответственно частное и остаток пpи делении ri-1 на ri, i = 0, 1, ....

Иными словами:

(\*)

Покажем, что этот пpоцесс обрывается на некотоpом шаге, когда очередное новое значение остатка принимает значение rn+1 = 0. По построению Так как степени остатков строго убывают, то на некотоpом шаге равенство (\*) соответствует делению нацело в крайнем случае мы дойдём до ситуации deg rn = 0, тогда очередной остаток rn+1 равен нулю. Пусть rn последний не равный нулю остаток. Тогда rn является наибольшим общим делителем и .

Для обоснования рассмотрим подробную запись алгоритма *(алгоритма Евклида)*:

(~)

Поднимаясь снизу вверх, мы получаем последовательно, что rn | rn-1, rn | rn-2, rn | rn-3, ..., rn | r1, rn | g, rn | f, то есть rn является общим делителем f, g. Пусть теперь некоторый многочлен ϕ делит f и g. Тогда, опускаясь в (~) сверху вниз (до предпоследнего соотношения), имеем: ϕ | r1, ϕ | r2, ϕ | r3, ..., ϕ | rn-1, ϕ | rn. Таким образом, rn есть наибольший из всех общих делителей f, g. Пpи обосновании мы воспользовались простым свойством делимости: если два элемента равенства (~) делятся на некоторый многочлен, то на него делится и третий элемент. Итак, rn = (f, g). Фактически мы доказали последовательность соотношений (f, g) = (g, r1) = (r1, r2) = ... = (rn-1, rn) = rn.

**Следствие 1**: Для любых ненулевых существуют такие, что

(1)

Если дополнительно , , то многочлены u, v можно выбрать так, чтобы было , .

**Доказательство:** Из (1) и цепочки алгоритма Евклида следует, что

мы положили u1 := 1, v1 := -qn (в обозначениях из доказательства теоремы 2). Выражая из предыдущего равенства rn-1 через rn-2 и rn-3, получим

u2 := v1, v1 := u1 − v1 qn-1, и т.д. В конце концов мы придём к представлению

совпадающему с (1).

**Определение 2**. Многочлены для которых , называются взаимно простыми.

**Следствие 2.** Многочлены являются взаимно простыми тогда и только тогда, когда существуют многочлены , для которых

**Доказательство.** Пусть взаимно просты. Тогда (, и по первому следствию для некоторых Пусть, наоборот, имеет место . Тогда делит 1, то есть является многочленом нулевой степени. Если ϕ нормирован, то ϕ = 1. В случае F = R это представление для взаимно простых многочленов доказано Э. Безу. Из следствия 2 получаются некоторые важные свойства, которые мы объединим в одно утверждение.

**Следствие 3.**

**Доказательство**.

(1). По предыдущему следствию, для некоторых u, v имеет место . Умножим это равенство на ψ:

Каждый общий делитель f и ψϕ является и делителем ψ, то есть общим делителем для f и ψ. Так как (f, ψ) = 1, то таковых последних, отличных от многочленов нулевой степени, нет. Поэтому . (2).

Умножим равенство на :

Так как ϕ делит оба слагаемых левой части, то ϕ делит и правую часть.

(3). По условию, f = ϕh = ψh1. Поэтому ψ | ϕh. Так как (ϕ, ψ) = 1, то по предыдущему свойству ψ | h. Тогда ϕψ | f.

PS: Результаты этого пункта являются справедливыми для так на зеваемых евклидовых колец многочленов, то есть целостных колец, в которых определено деление с остатком.

Билет 7)

*Неприводимые многочлены. Разложение в произведение неприводимых.*

*Неприводимые многочлены над R и над С.*

**Определение**:

Иными словами. Неприводимый многочлен – многочлен, который нельзя представить в виде произведения других неприводимых многочленов. При этом всём, многочлен не является константой .

**Теорема 1***.* Пусть:Тогда:

**Теорема 2**.

Существует единственное разложение на произведение некоторой константы “c” и конечного числа неприводимых нормированных многочленов. (нормированный многочлен – многочлен старший коэффициент которого = 1)

**Теорема 3**. Пусть: Тогда:. Иначе говоря, все многочлен, степень которых = 1, являются неприводимыми над C и R. Многочлены, степень которых = 2, остаются неприводимыми над R, если их дискриминант = 0

**Доказательство теоремы 1**.Значит две эти ситуации действительно возможны только по отдельности.

Билет 8)

*Корень многочлена. Кратные корни и дифференцирование. Основная теорема алгебры.*

**Корнем многочлена** , при подстановке которого многочлен обращается в 0. ,

**Корнем кратности k многочлена**

Корень кратности называется простым, а корень кратности - кратным.

**Производной многочлена**

**Свойства Дифференцирования**:

**Теорема 1.**   *.*

**Теорема 2.** Пусть *c* является корнем кратности*k* многочлена . Тогда *с* является корнем кратности *k − 1* производной *f ′*

**Теорема 3.**  *, .*

**Теорема 4.**

**Теорема 5.**

**Следствие 1*:*** Каждый многочлен степени n ≥ 1 с действительными коэффициентами имеет k действительный корней (k ≤ n) с учётом кратности.

**Следствие 2*:*** Два многочлена равны тогда и только тогда, когда они совпадают как функции .

**Док-во теоремы 3*.***

Билет 9).

*Задача интерполяции многочленами. Существование и единственность интерполяционного многочлена. Формулы Лагранжа и Ньютона.*

**Задача интерполяции многочленами**: существует единственный многочлен f степени ⩽ n такой, что выполнены равенства

**Доказательство:** Полагая перепишем соотношения в виде системы линейных уравнений относительно неизвестных коэффициентов aк с квадратной матрицей порядка n+1:

Определитель матрицы системы равен ; он отличен от 0, так как Поэтому система, а значит, и задача интерполяции имеет единственное решение. Явный вид многочлена f можно получить, решая эту систему. Однако чаще пользуются следующей интерполяционной формулой Лагранжа.

Многочлены Лагранжа Li ∈ F[x] обладают важными свойствами:

отсюда следует

**Интерполяционная формула Лагранжа**:

**Интерполяционная формула Ньютона**:

u0, …, un – разделённые разности.

Билет 10)

*Определение и примеры линейных пространств. Линейная зависимость и независимость, их свойства*.

**Определение**. Непустое множество элементов называется действительным линейным пространством, если в заданы две операции — сложения двух элементов и умножения элемента на произвольное действительное число. Результаты этих действий обозначаются и ; сказанное означает, что при всех .

При этом справедливы следующие восемь **условий** (аксиомы линейного пространства):

1. ;
2. ;
3. ;
4. ;
5. ;
6. ;
7. ;
8. .

Элементы линейного пространства называются векторами (отсюда другой термин для L векторное пространство).

Аксиомы линейного пространства распадаются на свойства сложения (−), умножения на число ( −) и их связи (законы дистpибутивности −). Пеpвые четыpе условия означают, что алгебраическая структура (L, +) является так называемой коммутативной (или абелевой) группой. Вектор 0 из называется нулевым, или нулём L, вектор (−x) из 4◦ противоположным к x. В пятом условии 1 есть обычная единица. Аксиомы дистрибутивности и ). различные: одна связана со сложением в L, а другая со сложением в R; оба действия обозначены символом +.

**Примеры линейных пространств**:

1. Пусть L произвольное множество с единственным элементом x. Положим для всех λ ∈ R. Очевидно, L является линейным пространством (обе части каждого равенства - pавны x). Из следует, что x = 0.
2. Линейное пространство геометрических векторов Vn, n = 1,2,3, с обычными операциями сложения векторов и умножения их на число.
3. Действительное n-мерное арифметическое пространство Rn, n ∈ N, с покомпонентными операциями сложения n-мерных векторов и умножения вектора на число.
4. Пространство матpиц поpядка m × n, m, n ∈ N, с поэлементными операциями сложения матpиц и умножения на число.
5. Линейное пространство алгебpаических многочленов от пеpеменного t c действительными коэффициентами степени
6. Совокупность многочленов произвольной степени, то есть

Таким образом, имеется бесконечная цепочка возрастающих линейных пространств многочленов.

1. Функциональные линейные пространства — это линейные пространства, элементами которых являются функции.
2. Пространства последовательностей - это такие линейные пространства, элементами которых являются бесконечные последовательности действительных чисел

**Линейная зависимость и независимость**:

**Определение**: Система векторов называется линейно зависимой, если некотоpая нетpивиальная линейная комбинация этих вектоpов pавна 0, и линейно независимой, если равенство

возможно лишь в ситуации

**Свойства линейной зависимости**:

1. Система из одного вектора линейно зависима .
2. Система, содержащая , линейно зависима.
3. Если некоторая подсистема линейно зависима, то и вся система линейно зависима.
4. Пусть . Система линейно зависима один из векторов есть линейная комбинация других.
5. Пусть система - линейно независима, система - линейно зависима. Тогда .
6. Пусть . Представление через является единственным система линейно независима.

**Лемма о двух системах векторов.** Пусть и — две системы векторов , причём вторая система линейно независима и для всех . Тогда . Иначе говоря, среди линейных комбинаций данных векторов может быть не более линейно независимых.

Билет 11)

*Лемма о двух системах векторов. Базис, размерность, координаты. Понятие о бесконечномерных пространствах.*

**Лема о двух системах векторов**.

Пусть и две системы векторов (линейное пространство), причём вторая система линейно независима и для всех Тогда . Иными словами, среди линейных комбинаций данных векторов может быть не более линейно независимых.

**Базис**.Конечная совокупность векторов называется базисом тогда и только тогда, когда выполнены два условия:

1. система линейно независима;
2. .

Второе условие означает в точности, что каждый вектор x ∈ L есть линейная комбинация элементов базиса: .

**Размерность** – число элементов базиса. Если , то говорят также, что пространство является n-мерным.

**Координаты**.Числа из называются координатами вектора в базисе .

**Бесконечномерные пространства**.Определение.

* Бесконечная система векторов линейного пространства L на зевается линейно независимой, если любая её конечная подсистема линейно независима.
* Линейное пространство, в котором есть бесконечная линейно независимая система, называется бесконечномерным.
* Пространство, в котором нет ни одной бесконечной линейно независимой системы, называется конечномерным.

**Теорема**. Пусть линейное пространство является конечномерным. Тогда число (максимальное число линейно независимых элементов ) существует.

**Доказательство**. По условию в найдётся ненулевой вектор . Если все системы вида линейно зависимы, то, . В противном случае найдётся линейно независимая система . Если все системы линейно зависимы, то . Продолжая этот процесс, построим такую линейно независимую систему , что все системы вида линейно зависимы. В соответствии со свойством линейной зависимости это означает, что каждый вектор есть линейная комбинация векторов , то есть . Процесс построения такой цепочки линейно независимых векторов обязательно оборвётся, иначе в найдётся бесконечная линейно независимая система Покажем, что число векторов в построенной системе не зависит от способа выбора линейно независимых векторов. Пусть наряду с системой описанным методом построена линейно независимая система . Тогда, как отмечалось, при всех и

Применяя дважды лемму предыдущего пункта о двух системах векторов, мы получим, что одновременно и . Это означает, что . Теорема доказана.

**Замечание**. Отметим ещё раз, что если — любая линейно независимая система с числом векторов , то обязательно . В конечномерном пространстве система с такими свойствами, как мы показали, обязательно существует.

**Теорема 1**.Если в существует базис, то любые два базиса имеют одинаковое количество элементов. Далее, коэффициенты разложения вектора по данному базису (то есть числа определяются единственным образом.

**Доказательство**.

1. Пусть существует два базиса и . Применяя лемму о двух системах в двух направлениях, получим и => .
2. Единственность координат (6 свойство линейной зависимости)

**Теорема 2**. – конечномерное обладает базисом или .

**Следствие**: любое бесконечномерное пространство не имеет базиса.

**Доказательство**.

. Пусть — конечномерное пространство. Если , то существует такая конечная линейно независимая система, которая даёт в линейной оболочке всё , — иными словами, существует базис .

. Если в существует базис, то обязательно конечномерно: число элементов любой линейно независимой системы не превосходит dim . Это сразу следует из леммы о двух системах векторов.

Конечномерность пространства отмечалась в предыдущем пункте. Теорема доказана.

**Примеры:**

1. – конечномерное
2. – конечномерное
3. – бесконечномерное (
4. – бесконечномерное

**Теорема 3**. Пусть обладает базисом. Тогда произвольная линейно независимая система может быть дополнена до базиса.

Билет 12)

*Действия с векторами в координатах. Изоморфизм линейных пространств и его свойства. Теорема об изоморфизме. Примеры изоморфных пространств.*

– любое действительное -мерное пространство изоморфно .

Отметим, что основные действия с векторами -мерного пространства легко осуществляются в любом фиксированном базисе . Мы действуем векторами как элементами .

**Опр.** (Теорема изоморфизма) Два действительных линейных пространства и называются изоморфными, если между их элементами можно установить взаимно-однозначное соответствие. Обладающее свойствами:

1. Если , , то .
2. Если , то .

Здесь , ; – произвольное число.

**Примеры.**

1. .
2. , . В частности, . Изоморфизм представляет собой способ оформления двумерного массива в одномерный и может быть осуществлён различными способами.

**Свойства изоморфизма:**

1. Нулевой вектор при изоморфизме соответствует нулевому вектору : . (из определения , где
2. Пусть и то
3. Изоморфизм сохраняет свойства линейной зависимости. При изоморфизме линейно независимая система соответствует линейно независимой, а линейно зависимая линейно зависимой.

**Теорема.** Два пространства различной размерности не изоморфны. Любые два конечномерных пространства одинаковой размерности являются изоморфными.

**Доказательство.** Пусть , допустим, что при этом .

Так как любой линейно независимой системе из m элементов пpи изомоp физме соответствует аналогичная система в (свойство 3), то в cуществует линейно независимая система из векторов. Это противоречит нашему предположению, и первая часть теоремы доказана.

Пусть теперь . Зафиксируем два базиса в и в – соответственно , .

Рассмотрим соответствие между элементами , устанавливаемое по следующему правилу:

.

Иначе говоря, соответствующими друг другу объявляются векторы, имеющие одинаковые координаты в выбранных базисах. Заметим, что тогда .

Указанное соответствие является изоморфизмом. Взаимная однозначность сразу следует из единственности координат. Выполнение условий 1) и 2) из определения изоморфизма есть следствие того, что сложение и умножение на число в линейном пространстве может осуществляться в координатах. Таким образом, , и теорема полностью доказана**.**

**Следствие.** Пусть . Тогда .

Билет 13)

*Подпространства. Сумма и пересечение подпространств. Теорема о размерностях суммы и пересечения. Прямая сумма подпространств.*

**Определение**

Пусть L – произвольное линейное пространство.

Непустое подмножество называется **линейным подпространством**, если замкнуто относительно операций сложения и умножения на число.

**Иначе говоря**

является линейным подпространством L если само является линейным пространством относительно операций, введённых в более широком множестве L.

Все линейные подпространства одного пространства L обязательно содержат общий элемент, а именно нулевой вектор L.

**Сумма и пересечение подпространств**

**Иначе говоря**

Это **множество всех векторов из векторного пространства, являющихся суммой некоторого вектора из одного подпространства и некоторого вектора из другого подпространства.**

**Теорема**

Пусть линейные подпространства *L*. Если *L* – конечномерно.

Конечномерное пространство — это векторное пространство, в котором имеется конечный базис — порождающая (полная) линейно независимая система векторов.

Тогда

**Прямая сумма** ⊕

Сумма *S =*  называется прямой, если представление *,*  является единственным.

**Теорема**.Сумма *S =* является прямой, то есть *S =* , тогдаи только тогда, когда выполнено любое из следующих эквивалентных условий:

1. Единственность разложения по и имеет место для нулевого век-тоpа: если *= 0,* , то обязательно  *= = 0.*

Билет 14)

*Ранг матрицы. Теорема о ранге. Методы вычисления ранга матрицы.*

**Определение.** Рангом матрицы называется ранг системы её столбцов как элементов , то есть размерность линейной оболочки системы столбцов *, …,*  :

Ранг матрицы равен максимальному числу линейно независимых столбцов этой матрицы.

**Теорема.** Ранг матрица равен максимальному порядку *r* отличного от нуля минора этой матрицы.

**Доказательство.** Пусть, как и ранее, . В случае матрица является нулевой и для неё . Пусть , то есть .

Без ограничения общности можно считать, что отличным от нуля минором порядка является минор , стоящий в первых строках и первых столбцах .

Итак, считаем, что главный минор ∆ порядка *r* матрицы **A** не равен 0, а все миноры большего порядка равны 0. Покажем, что тогда

1. первые столбцов матрицы линейно независимы
2. каждый столбец при есть их линейная комбинация. Это будет означать, что образуют базис линейной оболочки всех столбцов , то есть гарантирует равенство rg Линейная независимость сразу следует из свойств определителя. Если эта система была бы линейно зависимой, то таковой была бы и система столбцов длины , составляющих таким образом, мы имели бы Покажем, что при всех Для этого рассмотрим так называемое *окаймление* минора с помощью элементов -й строки, , и -го столбца, то есть определитель порядка

Определитель *D* имеет две одинаковые строки (в случае *i* ⩽ *r*) или является минором матрицы A порядка *r* + 1 (в случае *i* > *r*). Поэтому *D* = 0.

Запишем разложение *D* по последней строке. Алгебраическое дополнение к элементу *ail*, очевидно, равно ∆. Алгебраические дополнения к другим элементам этой строки не зависят от *i* и обозначаются *A1, …, Ar*. Таким образом, при всех *i* = 1, …, *m*

или, так как Δ ≠ 0,

(1)

(1) Так как коэффициенты в левой части равенства (1) не зависят от *i*, оно равносильно равенству для столбцов

Поэтому . В связи с предыдущим *rg(A) = r.*

**Методы вычисления ранга матрицы**:

Основной способ вычисления ранга матрицы связан с приведением её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований над строками, то есть является **методом Гаусса**.

1) Ранг матрицы не меняется пpи элементарных преобразованиях строк.

2) Ранг ненулевой ступенчатой матрицы равен числу её ступеней.

Другим методом вычисления ранга матрицы является метод **окаймления миноров**.

Для определения ранга достаточно найти число *r* из условия теоремы - максимальный порядок минора, отличного от 0. Полный перебор всех миноров является весьма трудоёмким. Однако, как следует из доказательства теоремы, мы можем ограничиться лишь минорами, окаймляющими данный ненулевой (то есть содержащими его в качестве подминоpа). Таким образом мы повышаем порядок ненулевого минора, насколько это возможно. Если все окаймляющие миноры ровны 0 (или их не существует), то значение *r* найдено, и процесс завершается.

Билет 15)

*Определение и примеры линейных операторов. Матрица линейного оператора, её применение для нахождения координат образа вектора. Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.*

, – два линейных пространства.

**Определение.** Линейным оператором из в называется отображение , для которого при всех , выполняются равенства:

Случай, когда = = называется линейным преобразованием пространства. В случае, когда , A называется линейным функционалом на L (Чаще обозначается F или f)

Из второго свойства понятно, что . Поэтому такое, что заведомо не является линейным оператором.

**Примеры линейных операторов.**

1. Оператор , для которого , , называется единичным, или тождественным. Единичный оператор обозначается через .
2. Пусть — оператор поворота на угол против часовой стрелки, . Выполнение равенств геометрически очевидно.
3. Зафиксируем матрицу Пусть = = , ecли столбец компонент получается из столбца компонент умножением на матрицу

Оператор называется оператором умножения на матрицу. Линейность следует из свойств умножения матриц

**Матрица линейного оператора**

**Теорема.** Для произвольной системы существует единственный линейный оператор такой что

**Доказательство.** Существование. Пусть в базисе Положим по определению

Если , то , Поэтому

Очевидно, для всех *j*. Единственность. Пусть операторы удовлетворяют условиям теоремы. Для любого в предыдущих обозначениях

Таким образом, линейный оператор однозначно определяется образами базисных векторов , которые можно задать в координатном виде, то есть Теорема доказана.

**Определение.** Матрица , -й столбец которой содержит координаты вектора в базисе , называется матрицей линейного оператора в базисе . Это означает, что для

Следует особо выделить, что для составления требуется не только определить образы базисных векторов , но и разложить их по тому же базису .

**Примеры применения.**

1. Матрица нулевого оператора в любом базисе является нулевой. Матрица единичного оператора в любом базисе является единичной.
2. Пусть оператор действует на базисных векторах по правилу . Тогда в базисе матрица этого оператора будет диагональной:

Операторы такого типа называются операторами простой структуры, или диагонализируемыми.

1. Пусть оператор ортогонального проектирования на плоскость . Выберем в базис так, чтобы Torда В этом базисе матрица ператора имеет вид

Пусть теперь базис таков, что , а результат проектирования есть . Нетрудно понять, что в базисе матрица оператора будет иметь другой вид:

**Изменение матрицы линейного оператора при изменении базиса.**

Матрицы одного и того же линейного оператора в двух различных базисах, вообще говоря, различные. Однако это изменение не может быть очень существенным: так ранги этих матpиц обязательно совпадают (они равны размерности образа оператора).

Пусть и — два базиса пространства . Будем считать, что линейный оператор имеет в этих базисах матрицы и соответственно.

Введём в рассмотрение матрицу перехода от базиса к базису . Напомним, что это невырожденная матрица, определяемая соотношениями

**Теорема.** Имеет место равенство

(1)

**Доказательство.** Пусть — произвольный вектор. Будем считать, что в базисе и в базисе . Как известно, координаты одного и того же вектора в двух базисах связаны равенствами

Вектор в базисе имеет столбец координат

Тот же вектор в базисе имеет столбец координат

Опять используя связь координат в различных базисах, получим матричное равенство

Последнее соотношение выполняется для всех . Взяв поочерёдно , мы получим, что соответствующие столбцы матриц и совпадают. Значит, , что эквивалентно (1).

Билет 16)

*Действия с линейными операторами. Матрицы соответствующих операторов.*

Пусть – линейные операторы, .

**Определение.** Суммой , произведением на число и произведением (суперпозицией) операторов () называются операторы, действующие из в , дейсвующие на векторе по правилам (условиям):

Пусть – фиксированный базис . Матрицы операторов в этом базисе обозначаются через

**Теорема.** – есть линейные операторы из в , при этом их матрицы равны соответственно .

**Доказательство.** Линейность операторов следует из линейности и . Действительно, для выполняются равенства:

Докажем вторую часть теоремы. Пусть сначала . Тогда в соответствии с равенством (3):

Если **С** – матрица оператора С, то должно быть одновременно:

Поэтому единственность разложения по базису . Пусть . Тогда:

Что даёт **С** .

Положим, . Считаем, как и ранее, что оператору соответствует матрица . Покажем, что . В соответствии с определениями произведения операторов и матрицы оператора:

С другой стороны

Сравнивая эти выражения, получим

Это означает, что . Теорема доказана.

Билет 17)

*Ядро и образ линейного оператора. Теорема о ранге и дефекте. Определение ранга и дефекта по матрице оператора.*

**Определение.** Ядро и образ линейного оператора определяются соответственно равенствами:

В случае, когда ядро и образ конечномерны, их размерности и dim называются соответственно дефектом и рангом оператора A.

**Теорема 1.** Пусть . Для любого оператора

(1)

Таким образом, в конечномерной ситуации сумма дефекта и ранга любого оператора равна размерности пространства.

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай , то есть Пусть произвольный базис Покажем, что образы базисных векторов линейно независимы. Это гарантирует равенство , то есть Соотношение (1) в этом случае имеет вид Пусть линейная комбинация с коэффициентами равна 0. В силу линейности

то есть *Ker* Так как ядро состоит из одного нуля, то Это в силу линейной независимости даёт усть *Кеr*, то есть K для всех то означает, что *Im*, так что *dimIm*, и (1) имеет вид Заметим, что в этой ситуации совпадает с нулевым оператором Haконeц, cчитаем *Ker*

усть базис ядра. Дополним эту систему произвольным образом до базиса векторами Покажем, что образы этих векторов  составляют базис *Im* Предположим, что

Обозначим Из линейности следует, что , то есть *Ker* Вектор *z*, поэтому, есть линейная комбинация базиса ядра:

Taк как образуют базис , то все коэффициенты в последнем равенстве равны 0. В частности, И так, векторы линейно независимы. Покажем, что произвольный вектор есть их линейная комбинация. Для

образуют базис Taким образом ,иравенство (5) имеет вид

Пример работы теоремы:

дро этого оператора задаётся системой уравнений

единственное решение которой является нулевым: Это означает, что *Ker* Дефект равен нулю, следовательно, ранг равен 3, то есть *Im* Базис *Im* совпадает с базисом Можно взять, например, канонический базис (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1).

**Теорема 2.** Пусть ***A*** — матрица оператора *A* в произвольном базисе. Тогда

**Следствие**. Ранг матрицы оператора есть инвариант этого оператора, не зависящий от базиса. В частности, если матрица оператора является невырожденной в некотором базисе, то она является невырожденной и в любом другом базисе. (Док-во сразу получается из равенств выше).

Билет 18)

*Обратный оператор, его линейность. Обратимость и не вырожденность. Другие критерии не вырожденности оператора.*

**Определение.** Пусть , . Оператор – называется обратным тогда и только тогда, когда существует такой, что . Где – тождественный оператор ().

**Действие обратного оператора.** Для обратимого из равенства следует , и наоборот.

**Утв**. существует не для всех линейных операторов

Например, нулевой оператор : для любого выполняется , таким образом не существует, следовательно нулевой оператор не обратим.

**Теорема 1.** Если существует обратный оператор , то он является линейным.

**Доказательство.**

Для и :

Мы воспользовались линейностью . Применим к этому равенству оператор и получим:

Теорема доказана.

**Определение.** Оператор является невырожденным, тогда и только тогда, когда существует базис, в котором матрица этого оператора является невырожденной.

**Теорема.** Оператор – обратим, тогда и только тогда, когда является невырожденным.

**Свойства обратимых операторов.**

**Другие критерии не вырожденности оператора.**

**Теорема.** Следующие условия эквивалентны (для любого оператора они вы полоняются или не выполняются одновременно)

1. Дефект = 0
2. , то есть является сюръекцией
3. является инъекцией, то есть
4. является биекцией (взаимно-однозначным отображением)
5. обратим, то есть существует
6. переводит любую линейно независимую систему в линейно независимую (в частности, базис в базис)
7. Матрица оператора в некотором (а значит, и любом) базисе является невырожденной.
8. не имеет собственного значения

**Доказательство.**

1, 2, 3, 4 эквивалентные в силу теоремы о ранге и дефекте оператора.

пусть . => , . В силу (3) , то есть является инъекцией.

пусть – инъекция. Возьмём . Так, как , то обязательно .

Значить .

Отображение биективно тогда и только тогда, когда A одновременно является сюръекцией и инъекцией. Следовательно это обеспечивает импликации:

, , .

Билет 19)

*Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Характеристический многочлен оператора, независимость от базиса. Вычисление собственных значений и собственных векторов.*

**Определение**. Собственным вектором оператора A называется такой вектор , для котоpого пpи некотоpом выполнено равенство

. (1)

Число из (1) называется соответствующим x собственным значением оператора A. Совокупность всех собственных значений оператора называется его спектром.

Оператор , является невырожденным тогда и только тогда, когда не имеет собственного значения .

**Примеры**:

1. Пусть оператор поворота на угол против часовой стрелки, . Геометрически очевидно, что имеет собственные векторы лишь для или . В любой из ситуаций каждый является собственным. Собственные значения операторов равно соответственно 1 и −1.
2. Для оператора ортогонального проектирования на плоскость H нетpудно выделить два класса собственных вектоpов. Для собственное значение ; для . Ясно, что других собственных векторов и собственных значений нет.
3. Для оператора дифференцирования собственными векторами являются лишь ненулевые многочлены из (константы); собственное значение . Для многочленов ненулевой степени равенство невозможно (дифференцирование понижает степень).

**Теорема**. Собственные векторы , соответствующие попарно различным собственным значениям оператора , линейно независимы.

**Доказательство** (индукция по числу векторов).

**Определение**. Характеристическим многочленом оператора A называется определитель матрицы :

Сумма всех главных миноров матрицы порядка (миноров, образованных строками и столбцами с одинаковыми номерами).

**Теорема**. Характеристический многочлен оператора не зависит от базиса, в котором записана его матрица.

**Доказательство**. Пусть A и B — матрицы одного и того же оператора A в двух различных базисах. Тогда они связаны преобразованием подобия: B = C⁻¹AC. Здесь C — невырожденная матрица перехода от одного базиса к другому, см. пункт 8.7. Но тогда по теореме об определителе произведения матриц

**Теорема**. Число из основного поля является собственным значением оператора тогда и только тогда, когда является корнем характеристического многочлена.

**Доказательство**. Собственный вектор и собственное значение оператора определяются условиями

или в координатном виде

Здесь в базисе, соответствующем матрице оператора . Число является собственным значением оператора тогда и только тогда, когда система линейных однородных уравнений из (5) имеет ненулевое решение . Это возможно тогда и только тогда, когда определитель матрицы системы равен 0.

**Следствие 1**. Каждый линейный оператор, действующий в комплексном линейном пространстве произвольной размерности , имеет собственный вектор.

**Следствие 2**. Каждый линейный оператор, действующий в действительном линейном пространстве нечётной размерности , имеет собственный вектор.

**Теорема Гамильтона-Кэли**: Пусть . Тогда .

**Определение**. Совокупность всех , удовлетворяющих условию , называется собственным подпространством оператора A, соответствующим , и обозначается .

**Определение**. Кратность собственного значения как корня характеристического многочлена называется его алгебраической кратностью и обозначается . Число называется геометрической кратностью собственного значения .

**Теорема**. Для любого собственного значения

Билет 20)

*Определение и примеры евклидовых пространств. Линейная независимость ортогональной системы.*

**Определение.** Евклидово пространство – это линейное пространство, в котором введено скалярное произведение векторов на ряду с операциями сложения и умножение на число.

Говорят, что в определено скалярное произведение векторов, если каждый поставлено в соответствие действительное число .

**Свойство**:

1. (комутативность)
2. (однородность)
3. (дистрибутивность)
4. ; (положительная определённость)

**Свойства евклидового пространства**:

1. : – следует их (2) при .
2. :

, если взять , то получим по (4).

**Примеры**:

1. – евклидово, если , где — угол между , .

этот пример является единственным, в котором скалярное произведение определяется через длину и угол.

1. , .

Стандартное скалярное произведение в задаётся равенством:

1. пространство многочленов степени становится Евклидовым, если в качестве скалярного произведения выбрать одно их следующих выражений:

**Утверждение**. Ортогональная система линейно независима.

**Доказательство**.

Пусть и . Скалярно умножим на равенство

Получаем, что . Так, как может быть любым, то .

Билет 21)

*Длина и угол в евклидовом пространстве. Неравенство Коши – Буняковского.*

– Длина вектора (также называется нормой)

Каноническая длина вектора в , , связана со стандартным скалярным произведением и равна

**Свойства**:

**Теорема Пифагора**.

**Равенство параллелограмма**.

Угол между векторами определяется соотношением

**Теорема (неравенство Коши-Буняковского)**. Для любых векторов выполняется неравенство

Равенство в выше имеет место только для коллинеарных (различающихся скалярным множителем). Часто используется следующая эквивалентная форма:

Доказательство. Если , неравенства выше обращаются в равенство. Зафиксируем пару . Рассмотрим функцию , определённую равенством

Из четвёртого свойства скалярного произведения следует, что при всех действительных . В связи с этим дискриминант должен быть неположительным:

что эквивалентно неравенству выше. Подстановка или приводит к совпадению обеих частей первого неравенства. Покажем, что иных ситуаций равенства нет. Если в если в первом неравенстве имеет место равенство и , то обязательно . Поэтому для некоторого . Это означает, что

то есть . Теорема доказана.

**Частные виды неравенства**.

1. Для пространства , неравенство эквивалентно и не даёт ничего нового.
2. Для с каноническим скалярным произведением соотношение записывается как (доказано Коши)
3. Пусть – непрерывные функции. Пользуясь интегральным скалярным произведением, получаем:

Билет 22)

*Ортогональный и ортонормированный базисы в евклидовом пространстве. Преимущества ортонормированного базиса. Ортогонализация Грама – Шмидта.*

Пусть — евклидово пространство размерности .

**Определение**. Базис называется ортогональным, если , , и ортонормированным, если дополнительно , . Другими словами, ортонормированный базис определяется соотношением

Ортонормированный базис может быть получен из ортогонального базиса с помощью простой процедуры нормировки:

**Теорема 1**. Пусть — некоторый ортонормированный базис, , — произвольные векторы (их координаты соответствуют базису ). Имеют место следующие равенства.

1. , . Таким образом, для выполняется тождество
2. .
3. .
4. Если , — угол между , то

**Доказательство**.

1. Скалярно умножим на равенство

Используем свойства скалярного произведения и равенства. Мы получим, что .

1. Опять с учётом того же свойства имеем:
2. По определению, . Остаётся воспользоваться 2), заменив на .
3. сразу следует из предыдущего и равенства

Теорема доказана.

Таким образом, каждое из свойств 1) – 2) является *характеристическим свойством ортонормированного базиса*.

**Теорема 2 (Алгоритм Грама-Шмидта)**. Пусть произвольная линейно независимая система векторов . Существует такая ортогональная система , что , ,

**Следствие**. В конечномеpном евклидовом пространстве существуют ортогональный и ортонормированный базисы.

**Доказательство** следствия очевидно: надо применять алгоритм ортогонализации к произвольному базису E и затем нормировать векторы.

Билет 23)

*Ортогональное дополнение к подпространству евклидова пространства, его свойства. Две задачи о вычислении ортогонального дополнения в .*

**Определение**. Ортогональным дополнением к подпространству L называется совокупность векторов E, каждый из которых ортогонален любому вектору из L:

Запись означает, что ортогонален всем элементам . Итак, и связаны тем условием, что для любой пары , выполнено , причём есть совокупность всех таких .

**Свойства**:

**Доказательство 3-4**: Сначала покажем, что сумма является прямой. Достаточно убедиться, что (см. теорему о прямой сумме). Пусть Тогда одновременно и Это означает, что , то есть Покажем теперь, что совпадает со всем Достаточно убедиться, что ситуацию (если или , надо восполь- зоваться простым свойством усть ортогональный базис его дополнение до ортогонального базиса Последняя система есть базис Действительно, , , в связи с чем Однако если , топо той же теореме о прямой сумме

что невозможно. Taким образом, , и векторы образуют базис Поэтому предыдущее соотношение обращается в равенство. Мы установили оба свойства

**Две задачи**: Пусть

Пусть , где

задаётся системой линейных однородных уравнений, коэффициенты которых являются компонентами векторов :

(1)

В этом фрагменте обозначают компоненты -мерного вектора .

**Утверждение**. Имеют место равенства:

Доказательство совершенно очевидно. Достаточно установить первое из соотношений; второе следует затем из двойственности .

Пусть . Тогда для всех , что в силу определения скалярного произведения эквивалентно (1); это означает, что .

Пусть, наоборот, . Запись (1) означает, что . Ясно, что тогда ортогонален произвольной линейной комбинации векторов . Поэтому .

**Пример**. Пусть задаётся системой уравнений

Тогда , где , , . Более интересен вопрос о задании с помощью системы однородных уравнений. Чтобы выписать эти уравнения, зададим исходное подпространство как линейную оболочку, а затем уже воспользуемся двойственностью. Решая исходные уравнения, найдём общий вид элемента и базис (фундаментальную систему решений):

Итак, Теперь применение последнего утверждения приводит к системе уравнений, задающих :

Билет 24)

*Расстояние в евклидовом пространстве. Расстояние от точки до подпространства.*

**Определение**: Расстоянием между точками называется величина

(1)

Из свойств длины сразу следуют основные свойства расстояния ( — произвольные элементы ):

1. ; .
2. .
3. (неравенство треугольника).

Отметим также важные специфические свойства расстояния (1). Как отмечалось, определение метрики в произвольном метрическом пространстве содержит лишь условия .

1. .
2. .
3. Пусть . Если в некотором ортонормированном базисе , , то

**Определение**: Величина

называется расстоянием между точкой и множеством . Число

называется расстоянием между множествами .

,

**Доказательство**. Для вектора eго ортогональная проекция на и ортогональная составляющая определены единственным образом. Мы покажем, что для из , то есть такой для которого

Taким образом, в предыдущей формуле может быть заменён на как говорят, расстояние Кроме того, мы установим, что ближайший элемент является единственным. усть произвольный элемент Тогда Так как , то Применяя к векторам и теорему Пифагора для евклидовых пространств получим

Поэтому для любого выполняется неравенство

равенство, в котором имеет место лишь при Взятие в (2) inf по приводит в наших обозначениях к оценке Taк как противоположная оценка очевидна из определения , то справедливо paвенство

доказана.

**Способы нахождения расстояния**: